数理解析研究所講究録
40巻 1968年 66-77

楕円型作用素のグリーン核の漸近的性質の L^2 的取扱いについて.

東大 理 藤原大輔

§1 序

Mを oriented compact C^∞ manifold で境界は無いとする。PをM上で定義され、後述する条件を満す pseudo-differential operator[1] とする。$E(x, y, \tau)$ を、グリーン作用素 $(P+\tau)^{-1}$ の対応する核とする。$\tau \to \infty$ のときの $E(x, y, \tau)$ の挙動を調べるのが目的である。方法として、L^2 理論を活用し議論の局所化に努力する。

先ず記号を説明する。

Mを σ-compact な orientable C^∞ manifold とする。

M上に体積要素 dx が与えられているものとする。我々は直積 $M\times R^1$ を考える。$M\times R^1$ の一般の点を (x, s), $x\in M$, $s\in R^1$ と表わす。多様体 M, $M\times R^1$, 等々の上の関数[2]

1) cf. L. Hörmander: Pseudo-differential Operators Comm. Pure. Appl. Math. 18 501-517 (1965).

2) 以下の議論は Mとその上の vector bundle Xの smooth sections に働く elliptic operators に対して論ずる方が興味深いが、ここでは簡単のため X は M上の trivial line bundle とする。

空間については、L. Schwartz, A. Grothendieck 等の慣用に従う。X, Y を二つの局所凸線型空間とするとき、$X\hat{\otimes}Y$ で X と Y の射影的テンソル積の完備化とする[3)]。
$S_1=\{(\rho,\sigma)\in R^2;\ \frac{1}{2}\le \rho^2+\sigma^2\le 2\}$ とおく。

定義 1.　線型連続写像 $P: \mathcal{D}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}'(R^1)\to \mathcal{E}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}'(R^1)$ が次の条件を満すとき、β-擬微分作用素と呼ぶ。

実数の減少列 $s_0>s_1>s_2>\cdots\longrightarrow -\infty$ があって、任意の $f\in\mathcal{D}(M)$ と $\mathrm{supp}\,f$ で $dg\neq 0$ なる $g\in\mathcal{E}(M)$[4)] からなる $\mathcal{E}(M)$ の compact set $\mathcal{K}$、任意の正整数 N に対して、$e^{-i\lambda(\rho g+\sigma s)}P(fe^{i\lambda(\rho g+\sigma s)})$ は s に独立で、$\lambda\ge 1$ のとき

(1) $\lambda^{-s_N}\left(e^{-i\lambda(\rho g+\sigma s)}P(fe^{i\lambda(\rho g+s\sigma)})-\sum_{j=0}^{N-1}p_j(f,\rho g,x,\sigma)\lambda^{s_j}\right)$

が $\mathcal{E}(M\times S_1)$ で有界になるような $p_j(f,\rho g,x,\sigma)$ が存在する。

s_0 を P の order と呼び、$\sigma_p(f,g)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(f,\rho g,x,\sigma)\lambda^{s_j}$ なる形式和を、P のシンボルと呼ぶ。

定義 1 から推察されるように、若干の計算の後に、β-擬微分作用素 P は、$M\times R^1$ で定義された Hörmander の

3) C.f. A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, A.M.S. Memoir. 1955
4) g は実数値とする

意味での Pseudo-differential operator であって, $R^1 \ni s$ に関して, 定係数のものであることが分る。

§2. 結果

本節では, M は compact とする。P は Hörmander の意味での M 上の elliptic Pseudo-differential Operator で order は $2m$, とする。更に, $x \in M$, $\xi \neq 0$ を M の x における co-tangent vector とするとき, P の主シンボル $p_0(x, \xi)$ は $\arg p_0(x, \xi) \neq \pm\pi$, を仮定する。

$x \in M$, $\xi \in T^*_x(M)$ が動くとき, $p_0(x, \xi)$ は 次の斜線をひいた領域 $\subset \mathbb{C}^1$ を動くとしてよい。

fig I

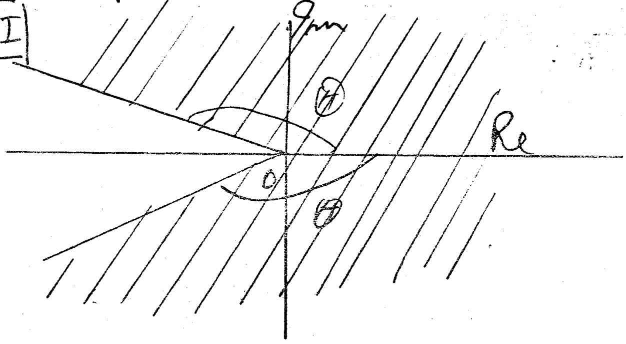
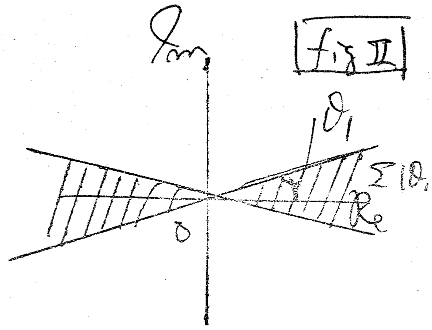


fig II



$2m\theta_1 < \Theta$, とすれば, fig II で斜線をひいた領域 $\Sigma(\theta_1) \ni z$ に対して, $P + z^{2m} D_s^{2m}$, $s \in R^1$ は $M \times R^1$ 上の elliptic p-擬微分作用素である。

このとき, 結果というのは,

<u>定理 1</u>　$T_0>0$ が十分大きいとき，$z\in\Sigma(\theta_1)$ に対して，β-擬微分作用素 $G_z^{(0)}$ が存在して，

(2.1) $$(P+z^{2m}D_s^{2m}+T_0)G_z^{(0)}=I \quad \text{on } \mathcal{D}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$

(2.2) $$G_z^{(0)}(P+z^{2m}D_s^{2m}+T_0)=I$$

$G_z^{(0)}$ の order は $-2m$。

<u>定義 2</u>　$$e^{-is}\,G_z^{(0)}(\varphi e^{is})=E^{(0)}(z)\varphi,\quad \varphi\in\mathcal{D}(M)$$

とすると，

<u>定理 2</u>　$E^{(0)}(z)$ は $z\in\Sigma(\theta_1)$ をパラメターとするM上の擬微分作用素で，

(2.3) $$(P+z^{2m}+T_0)E^{(0)}(z)=I$$

(2.4) $$E^{(0)}(z)(P+z^{2m}+T_0)=I$$

を満す。

以上の2つが，主要な定理で，この応用として，

<u>定理 3</u>　任意の $z\in\Sigma(\theta_1)$ に対し，$G_{z,\ell}$ を $G_z^{(0)}-G_{z,\ell}$ が $-\ell$ 位の β-擬微分作用素である任意の作用素とする。$E_\ell(z)\varphi=e^{-is|z|}\,G_{\frac{z}{|z|}}(e^{is|z|}\varphi)$，$\forall\varphi\in\mathcal{D}(M)$

によって $E_\ell(z)$ を定義するならば、

(2.5) $\|E^{(0)}(z)\varphi - E_\ell(z)\varphi\|_{H^{a+b}(M)} \le C(1+|z|)^{b-\ell}\|\varphi\|_{H^{a}(M)}$

がすべての $\varphi\in\mathcal{D}(M)$, $0\le b\le \ell$ に対して成立する。
但しここで $H^{a+b}(M)$ は M 上の $a+b$ 次ソボレフ空間。

任意の $\ell>0$ に対して、$G_{z,\ell}$ は、P のシンボルから、シンボルの計算のみによって構成出来る。
また、M の次元を n とすると、

定理 4　$2m-n=\gamma>0$、のとき、グリーン作用素 $(P+z^{2m}+\tau_0)^{-1}$ は $C(M\times M)\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Sigma(\delta_2,\theta_2))$ [5] に属する核 $E(x_1,x_2,z)$ をもち、$(x_1,x_2,z)\in M\times M\times\Sigma(\delta_2,\theta_2)$、のとき、

(2.6) $|E(x_1,x_2,z)|\le C_\gamma(1+|z|)^{-\gamma}$

が成立する。また $E(x_1,x_2,z)$ は、次のようにして与えられる。φ_i を点 x_i $(i=1,2)$ の近傍で1に等しく、$\mathrm{supp}\,\varphi_1\cup\mathrm{supp}\,\varphi_2$ が（必ずしも連結でない）座標近傍 U に含まれるとする。$\xi\cdot x_i$ を x_i の座標の（実）線型関数として、

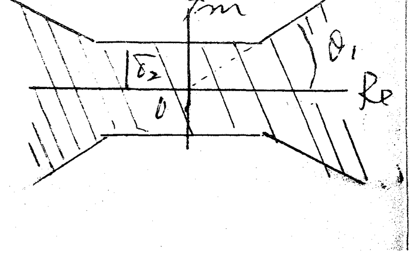
(2.7) $E(x_1,x_2,z)=(2\pi)^{-n}\rho(x_2)^{-1}\int_{R^n} g_z(x_1,\xi,1)e^{i(x_1-x_2)\cdot\xi}d\xi$

但しここで

$$g_z(x,\xi,\sigma)=\varphi_1 e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}G_z^{(0)}(\varphi_2 e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)}),\ \sigma\in R$$

---

5) $\Sigma(\delta_2,\theta_2)$ は右の斜線部を除いた複素領域



$\rho(x)$ は x での与えられた volume element の座標 $dx^1 \cdots dx^n$ に関する密度。(2.7) 式で $x = x_1 = x_2$ とおくと、

定理 5

$$(2.8)\quad E(x, x, \sigma) = (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \int_{R^n} g_\Sigma(x, \xi, 1)\, d\xi$$

$$\sim (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^{-s_j+n} \int_{R^n} g_{j\Sigma}(x, \xi, 1)\, d\xi$$

なる漸近展開を得る。但し、ここで

$$e^{-i(x\cdot\xi + s\sigma)} \varphi\, G_\Sigma^{(0)}(\varphi e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_{j\Sigma}(x, \xi, \sigma).$$

(この漸近展開の存在は定理 1 が保証する)

次に実例については、$p \in M$ 上の Iterated Laplacian Δ^m とすると、

定理 6　M の Riemann 計量が x の近傍で局所的にユークリッド的ならば、任意の $N > 0$ に対し

$$(2.9)\quad \lim_{\sigma\to\infty} \sigma^N \left\{ E(x, x, \sigma) - (2\pi)^{-n} \omega_{n-1} (2m)^{-1} \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}} \sigma^{n-2m} \right\} = 0.$$

従って M が locally Euclidean なら、$\forall N > 0$ に対し、

$$(2.10)\quad \lim_{\sigma\to\infty} \sigma^N \left(\mathrm{trace}\,(\Delta^{m} + \sigma^{2m})^{-1} - (2\pi)^{-n} \omega_{n-1} (2m)^{-1} \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}} v(M)\, \sigma^{n-2m} \right) = 0$$

但し $v(M)$ は M の体積、ω_{n-1} は $n-1$ 次単位球面積

<u>定理7</u>　$M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を n 次元 oriented hypersurface として，M上に $\mathbb{R}^{n+1}$ から導びかれた metric を入れる．$P = \Delta^m$．$2m > n$ として，

$$F(x,x,\sigma) \sim (2\pi)^{-n}(2m)^{-1}\frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}}\sigma^{n-2m}$$

(2.11)

$$+(AK_1(x)^2 + BK_2(x))\sigma^{n-2m-2}$$
$$+O(\sigma^{n-2m-4})$$

但しここで，$K_j(x)$ は，M の x における j 次平均曲率
A, B は m と n による定数．$n=2$．$m=2$ ならば
$$A = 21\pi^{-1}, \quad B = -\frac{10}{3}\pi^{-1}. \quad \text{即ち}$$

(2.12)
$$F(x,x,\sigma) \sim \frac{1}{16\pi}\sigma^{-2} + \{21\pi^{-1}H(x)^2 - \frac{10}{3}\pi^{-1}K(x)\}\sigma^{-4} + O(\sigma^{-6})$$

$H(x)$ は平均曲率．$K(x)$ はガウス曲率．
積分すると，Gauss-Bonnet's Formula から

<u>定理8</u>　$M \subset R^3$ compact oriented surface とすると．

$$\mathrm{trace}\,(\Delta^2+\sigma^4)^{-1} \sim \frac{1}{16\pi}v(M)\sigma^{-2}$$

(2.13)

$$+\{21\pi^{-1}\int_M H(x)^2dx - \frac{20}{3}\pi^{-1}v(M)\chi(M)\}\sigma^{-4}$$
$$+O(\sigma^{-6})$$

ここで $v(M)$ は M の体積．$\chi(M)$ は Euler-Poincaré 数．

§ 3　証明の概略

先ず β−擬微分作用素について．

<u>Lemma 3.1</u>　　Q を elliptic β-pseudo-diff. op. on $M\times\mathbb{R}^1$ of order s_0 とすると，$-s_0$ 次の β-pseudo-diff. op F と，$-\infty$ 次の β-pseudo-diff. operators Q_1, Q_2 が存在して

$$(3.1)\qquad Q\circ F = I + Q_1, \qquad F\circ Q = I + Q_2$$

<u>Lemma 3.2</u>

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(M)$, $\operatorname{supp}\varphi_1 \cup \operatorname{supp}\varphi_2$ が一つの座標近傍 U に入っているとき，$x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ で座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ の実線型関数をあらわすと，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ に対し，

$$(3.2)\qquad \begin{aligned}&\|e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}\varphi_1 Q(\varphi_2\varphi e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)})\|_{H^{a+b}(M\times\mathbb{R}^1)}\\ &\le C(1+|\xi|+|\sigma|)^b \|\varphi\|_{H^a(M\times\mathbb{R}^1)}\end{aligned}$$

但し Q は of order $s_0 \le 0$ とす。　$\forall b \in [s_0, -s_0]$

<u>Lemma 3.3.</u>　　Lemma 3.2 の仮定の下で任意の $u \in \mathcal{D}(M)$ に対し

$$(3.3)\qquad \|e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}\varphi_1 Q\varphi_2(e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}u)\|_{H^{a+b}(M)} \le C(1+|\xi|+|\sigma|)^b\|u\|_{H^a(M)}.$$

<u>Lemma 3.4</u>　　同じ仮定の下で　$\forall b \in [0, -s_0]$ に対し

$$(3.4)\qquad \|e^{-is\sigma}Q(e^{is\sigma}u)\|_{H^{a+b}(M)} \le C(1+|\sigma|)^{b+s_0}\|u\|_{H^a(M)}.$$

<u>Lemma 3.5</u>　　Q を order $-\infty$ の β擬微分作用素

とおくと、　Q は　$\mathcal{E}'(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathcal{E}(M)\hat{\otimes}\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^1)$
への連続線型写像に一意的に拡張される。

Lemma 3.2 〜 3.4 は Fourier 変換によって容易に示し得る。

さて、P に関する我々の仮定の下では、

<u>定理 3.1</u>　　τ_0 が十分大のとき、$z \in \Sigma(\delta_1, \theta_1)$ のとき、$(P + z^{2m} + \tau_0)^{-1}$、　　は存在し　$\forall a \in [0, 2m]$ に対し

$$(3.5) \qquad {}_a\|(P + z^{2m} + \tau_0)^{-1}\|_0 \leq C(1+|z|)^{a-2m}$$

但し、L が $H^a(M)$ から $H^b(M)$ への連続線型写像のとき、そのnormを ${}_b\|L\|_a$ と書くことにする。

これによって先ず、定理 2 の作用素 $E^0(z)$ の存在が分る。
次に $G_z^{(0)}$ を

$$(3.6) \qquad G_z^{(0)}\,\varphi\otimes\phi = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^1}\hat{\phi}(\sigma)\,e^{i\sigma s}(E^{(0)}(\sigma z)\varphi)\,d\sigma$$

で定義する。すると、定義 2　　　によって $G_z^{(0)}$ と E^0 は結ばれる。$G_z^{(0)}$ が β−擬微分作用素であることは、次のようにして示される。まず、Lemma 3.1 を $Q = P + z^{2m}D_s^{2m} + \tau_0$ に適要する。とパラメーター z に

よるが、β pseudo-diff. op. F_Z と $-\infty$ 次の β-pseudo-diff operator Q_Z', Q_Z'' があって

$$Q F_Z = I + Q_Z', \qquad F_Z Q = I + Q_Z''.$$

従って

$$G_Z^{(0)} = F_Z - Q_Z' F_Z + Q_{Z,-\infty}' G_Z^{(0)} Q_{Z,-\infty} \tag{3.7}$$

とかける。 <u>Lemma 3.3</u> によって

$$\| e^{-i(x\cdot\xi + s\cdot\sigma)} \varphi_1 (F_Z - Q_Z' F_Z)(\varphi_2 u e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)})\|_{H^a(M)}$$

$$\leq C_2 \qquad \|u\|_{H^a(M)}.$$

また~~次の補~~

<u>Lemma 3.6</u>, Lemma 3.3 の仮定の下で、
R_1, R_2 を β-pseudo-diff. operator of order $-k \leq 0$.
とすると、$\forall a \in [0, k]$ に対して。

$$\| e^{-i(x\cdot\xi + s\tau)} \varphi_1 R_1 G_Z^{(0)} R_2 (\varphi_2 u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)})\|_{H^a(M)} \tag{3.7}$$

$$\leq C_0 (1+|Z\tau|)^{-2m} \|u\|_{H^a(M)}$$

C は Z によらぬ const.　　$u \in \mathcal{D}(M)$。

これ等と $\mathcal{E}(M) = \bigcap_{a>0} H^a(M)$ とを合わせ用いて
$G_Z^{(0)}$ の β-pseudo-diff op. であることが分る。

ゝ 即ち Lemma 3.6 に於いて $R_1 = Q'_{2,-\infty}$
$R_2 = Q_{2,-\infty}$ とおいて (3.7), (3.8) 式を考慮すると，φ, ψ を任意の C_0^∞-functions として，

(☆) 線型写像，$u \longrightarrow e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}\psi(ue^{i(x\cdot\xi+s\tau)})$
は $\mathcal{D}(M)$ から $\mathcal{D}(M)$ への連続写像として，
ξ, τ を R^{n+1} で動かしたとき，同程度連続のことが分る。

ところで，(3.7) を導びいたと同様にして，

(3.10) $$G_2^{(0)} = F_2 - G_2^{(0)} Q_{2,-\infty}$$

が成立することが分る。 よって

(3.11)
$$\begin{aligned}
&e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\tau)}) \\
&= e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi F_2(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}\varphi_j e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}(\varphi_j e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)} Q_{2,-\infty}\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)})
\end{aligned}$$

(但しここで φ_j, $j=1\cdots k$, は十分細い support をもつ，smooth partition of unity on M.)

F_2 は P-擬微分作用素だから右辺第一項は (ξ, τ) につき漸近展開をもつ。 右辺第二項

の中の $\psi_j e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\tau)} Q_{2,-\infty}(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\tau)})$ も同様に漸近展開をもつ。これは $\mathcal{D}(M)$ の Topology での漸近展開であった。(※)を考慮すれば，(3.11)式右辺第二項，従って，左辺が漸近展開をもつことが分る。このことは，$G_2^{(0)}$ が p-擬微分作用素であることを示している。

定理 2 の証明は，定理 1 の証明のアナロジーでも良いし，定理 1 から導くのも良い。定理 3 は Lemma 3.3 の応用である。定理 4 は，前半，評価(2.6)を出す迄は，Sobolev の埋蔵定理と，L. Schwartz の核定理と，定理 3 から出る。(2.7)式以後は，p-擬微分作用素の一般論から分る。

以上の詳しい証明は，下記を参照願いたい。

D.Fujiwara, The asymptotic Formula for the trace of the Green Operators of Elliptic Operators on Compact Manifolds, Proc. Jap. Acad. vol.43, (1967) p.426-428 or, Journal of the Fac. of Sc., The University of Tokyo, to appear.